ΙΣΟΤΙΜΙΕΣ - ΙΣΟΥΠΟΛΟΙΠΑ (ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ / ΑΣΚΗΣΕΙΣ)

Αφηρημένες Ασκήσεις και Μαθηματικοί Διαγωνισμοί:

1) Να υπολογιστεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού $A = 13^{23} \cdot 27^{41}$ με το 8.

ΛΥΣΗ

Είναι $13^2 = 169 \equiv 25 \bmod 8 \equiv 1 \bmod 8$

Επομένως, $13^{23} = 13^{2\cdot 11+1} = 13\cdot(13^2)^{11} \equiv 13 \bmod 8 \equiv 5 \bmod 8$

Επίσης, $27 \equiv 3 \bmod 8$ από όπου $27^2 \equiv 9 \bmod 8 \equiv 1 \bmod 8$

Επομένως, $27^{41} = 27^{2\cdot 20+1} = 27\cdot(27)^2 \equiv 27 \bmod 8 \equiv 3 \bmod 8$

Άρα, $A \equiv 15 \bmod 8 \equiv 7 \bmod 8$ και επομένως υπάρχει $a \in \mathbb{Z}$ τέτοιο, ώστε $A = 8a+7$. Άρα, το υπόλοιπο που ζητείται είναι το 7

2) ΝΔΟ $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv 0 \bmod 7$

ΛΥΣΗ:

Ισχύει $2222 \equiv 3 \bmod 7$ και $5555 \equiv 4 \bmod 7$

Άρα, $2222^{5555} + 5555^{2222} \equiv (3^{5555} + 4^{2222}) \bmod 7$ (1)

Επίσης, $3^{5555} = (3^5)^{1111} \equiv (-2)^{1111} \bmod 7 \equiv -2^{1111} \bmod 7$

και $4^{2222} = (4^2)^{1111} = 2^{1111} \bmod 7$

Έτσι, προσθέτοντας τα κατά μέλη, έχουμε στην (1) ότι:

$(-2^{1111} + 2^{1111}) \bmod 7 \equiv 0 \bmod 7$

3) ΝΔΟ ο αριθμός $A = \sqrt[4]{5\lambda+3}$, $\lambda \in \mathbb{N}$ είναι άρρητος

ΛΥΣΗ

Έστω a τυχαίος αριθμός ακέραιος

Τότε, ο a μπορεί να γραφεί μόνο στις παρακάτω μορφές:

$a \equiv 0,1,2,3,4 \pmod 5 \Leftrightarrow a^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5 \Leftrightarrow a^4 \equiv 0,1 \pmod 5$

Επειδή, $5\lambda+3 \equiv 3 \bmod 5$, συμπεραίνουμε ότι ο $5\lambda+3$ δεν έχει τη μορφή a^4, $a \in \mathbb{Z}$. Άρα, ο A άρρητος (είναι $A^4 = 5\lambda+3 \equiv$ $\equiv 3 \bmod 5$ άτοπο).

(*) Εργασία:

ΝΔΟ ο αριθμός $a = \sqrt{5n^2+10}$ είναι άρρητος $\forall n \in \mathbb{Z}$

(Μολδαβία 1997)

4) ΝΔΟ ο αριθμός 121 δεν διαιρεί τον n^2+3n+5, $\forall n\in\mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ (Βουλγαρία)

Έστω ότι το $121 \mid n^2+3n+5$

Τότε το $11 \mid n^2+3n+5$ (1)

Άρα, $n^2+3n+5 \equiv 0 \bmod 11 \equiv 33 \bmod 11 \iff$

$\iff n^2+3n-28 \equiv 0 \bmod 11 \iff 11 \mid n^2+3n-28 \iff$

$\iff 11 \mid (n-4)(n+7) \iff 11 \mid n-4$ ή $11 \mid n+7 \iff$

$\iff (n=11k+4$ ή $n=11k-7)$ και αντικαθιστώντας το n, στο n^2+3n+5 όπου το τελευταίο παίρνει τη μορφή $121\lambda+u$ με $0<u<21$ που είναι άτοπο: (1)

5) Έστω $a,b,c\in\mathbb{Z}$: $(a-b)\cdot(b-c)\cdot(c-a)=a+b+c$

ΝΔΟ ο αριθμός $a+b+c$ διαιρείται με το 27

ΛΥΣΗ (Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 1997)

Για τους a,b,c ισχύει ότι

$a,b,c \equiv 0, \pm 1 \bmod 3$

Εάν και οι τρεις τους αφήνουν διαφορετικό υπόλοιπο όταν διαιρεθούν με το 3 τότε $a+b+c \equiv 0+1-1 \equiv 0 \bmod 3$

Ενώ $(a-b)(b-c)\cdot(c-a) \not\equiv 0 \bmod 3$.

Εάν είναι δύο ακριβώς τα ισοϋπόλοιπα, τότε άνευ βλάβης της γενικότητας $a-b \equiv 0 \bmod 3$ άρα $(a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0 \bmod 3$

Ενώ $a+b+c \not\equiv 0 \bmod 3$. Συνεπώς, οι a,b,c ισοϋπόλοιποι mod 3

Τότε $(a-b) \bmod 3 \equiv (b-c) \bmod 3 \equiv (c-a) \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$, άρα

$(a-b)\cdot(b-c)(c-a) \equiv 0 \bmod 27$. Όμως, $a+b+c=(a-b)\cdot(b-c)(c-a)$

άρα $a+b+c \equiv 0 \bmod 27$

6) Να προσδιοριστούν οι πρώτοι αριθμοί p και q για τους οποίους ο αριθμός $p^{p+1}+q^{q+1}$ είναι πρώτος

ΛΥΣΗ (Ευκλείδης 1995)

Στην περίπτωση όπου οι αριθμοί p και q περιττοί ή άρτιοι το άθροισμα $p^{p+1}+q^{q+1}$ θα είναι άρτιος και μάλιστα μεγαλύτερος του 2, άρα όχι πρώτος. Επομένως, ο ένας αριθμός είναι το 2 και ο άλλος περιττός. Δίχως βλάβη της γενικότητος έστω $p=2$ και $q=0,1,-1 \bmod 3$ περιττός

Άτοπο

Εάν $q \equiv 1 \bmod 3$, τότε $p^{p+1} + q^{q+1} \equiv (8+1) \bmod 3 \equiv 9 \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$

Εάν $q \equiv -1 \bmod 3$, τότε $p^{p+1} + q^{q+1} \equiv (8+1) \bmod 3 \equiv 9 \bmod 3 \equiv 0 \bmod 3$

Εάν $q \equiv 0 \bmod 3$, τότε επειδή ο q πρώτος Άτοπο

Θα είναι $q = 3$ και έτσι $p^{p+1} + q^{q+1} = 89$ πρώτος

Άρα, μοναδική δεκτή λύση είναι η $p = 2$, $q = 3$ (ή $q = 2$, $p = 3$)

7) Για ποιές τιμές του λ έχει το πολυώνυμο:

$x^3 + 1995x^2 - 1994x + \lambda$ και τις 3 ρίζες ακέραιες;

(Αρχιμήδης 1994)

ΛΥΣΗ

Έστω το πολυώνυμο έχει τρεις ρίζες $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathbb{Z}$

Τότε από τους τύπους Vieta έχουμε ότι

$A = \rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = -1995 \equiv 0 \bmod 3 \quad (1)$

$B = \rho_1\rho_2 + \rho_2\rho_3 + \rho_3\rho_1 \equiv -1994 \equiv 0 \bmod 3$

Από την (1) έχουμε ότι:

$\rho_1, \rho_2, \rho_3 \equiv 0 \bmod 3$ ή $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \equiv 1 \bmod 3$ ή $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \equiv -1 \bmod 3$

Δηλ. $\rho_1 \equiv 0 \bmod 3$ και $\rho_2 \equiv 0 \bmod 3$ και $\rho_3 \equiv 0 \bmod 3$

(οι άλλες περιπτώσεις είναι ισοδύναμες)

οπότε $B = 0 \bmod 3$ ή $B \equiv 1 \bmod 3$.

όπου αυτό είναι αδύνατο διότι $B \equiv 1 \bmod 3$

Άρα, $\nexists \lambda$: το πολυώνυμο να έχει ρίζες

8) Να βρεθούν τα δύο τελευταία ψηφία του αριθμού 2^{70}

(Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία 1988).

ΛΥΣΗ

$2^{10} \equiv 1024 \bmod 100 \equiv 24 \bmod 100$

$(2^{10})^7 \equiv 24^7 \bmod 100 \equiv [(24 \cdot 24)(24 \cdot 24)(24 \cdot 24) \cdot 24] \bmod 100 \equiv$

$\equiv (76 \cdot 76 \cdot 76 \cdot 24) \bmod 100 \equiv 76 \cdot 76 \cdot 24 \bmod 100 \equiv$

$\equiv 76 \cdot 24 \bmod 100 \equiv 24 \bmod 100$

Άρα, τα 2 τελευταία ψηφία του 2^{70} είναι 2 και 4

Να βρεθούν τα 2 τελευταία ψηφία του αριθμού 6^{1989}

Εργασία (Αρχιμήδης 1989)

9) Να βρεθεί το τελευταίο ψηφίο του αριθμού

$$\underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1001\ 7\text{-άρια}}$$

(ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΚΑΝΑΔΑ)

ΛΥΣΗ

Αρχικώς παρατηρούμε ότι

$$7^4 \equiv 1 \mod 10$$

Επίσης, αφού: $7^{2k} \equiv 1 \mod 4$ και $7^{2k+1} \equiv 3 \mod 4$

τότε

$$a := \underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1001\ 7\text{-άρια}} \equiv 3 \mod 4 \quad , \text{συνεπώς } a = 3k+4,\ k \in \mathbb{Z}$$

Έτσι,

$$\underbrace{7^{7^{7^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{7}}}}}}}_{1001\ 7\text{-άρια}} = 7^a = 7^{4k+3} = 7^3 \cdot (7^4)^k \equiv 7^3 \mod 10 \equiv 3 \mod 10$$

Άρα, το τελευταίο ψηφίο είναι 3

10) ΝΔΟ υπάρχουν φυσικοί αριθμοί που τα 4 τελευταία ψηφία τους είναι 1994 και διαιρούνται με το 1993

ΛΥΣΗ (Ελλ. Μαθηματική Εταιρεία 1994)

Έστω ο αριθμός αυτός:

$$\underbrace{a_n a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1}_{A} 1994 = 10000A + 1994 = A(5 \cdot 1993 + 35) + 1993 + 1$$
$$\equiv (35 \cdot A + 1) \mod 1993$$

Για να είναι $35A + 1 \equiv 0 \mod 1993$, θα πρέπει $35A+1 = 1993k$ όπου $k \in \mathbb{Z}$. Δηλαδή $A = 57k - \frac{2k+1}{35}$. Δηλαδή θα πρέπει το $2k+1$ πολλαπλάσιο του 35. Για $k = 17$ $A = 968$

Άρα, ο αριθμός 9681994 είναι πολ/σιο του 1993
Υπάρχουν άπειροι τέτοιοι αριθμοί αφού η (1) έχει άπειρες λύσεις

11) ΝΔΟ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει:
$$17 \mid 3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε $3^4 = 81 \equiv 13 \bmod 17$

Επομένως, $3^{4n+2} = 9 \cdot 81^n \equiv 9 \cdot 13^n \bmod 17$

Επίσης, $4^3 = 64 \equiv 13 \bmod 17$

οπότε $4^{3n+1} = 4 \cdot (4^3)^n \equiv 4 \cdot 13^n \bmod 17$.

Άρα, $3^{4n+2} + 2 \cdot 4^{3n+1} \equiv 9 \cdot 13^n + 8 \cdot 13^n = 17 \cdot 13^n \equiv 0 \bmod 17$

Παρατήρηση: Η άσκηση 11 μπορεί να λυθεί και μέσω μαθηματικής επαγωγής

Εάν a_n ακολουθία με $a_1 = 1$, $a_2 = 3$ και $a_{n+2} = (n+3)a_{n+1} - (n+2)a_n$, να βρεθούν τα n για τα οποία $11 \mid a_n$. (Βαλκανιάδα 1990)

(Υπόδειξη: Παίρνουμε τις διαφορές:

$$\left.\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= (n+2)(a_{n+1} - a_n) \\ a_{n+1} - a_n &= (n+1)(a_n - a_{n-1}) \\ &\vdots \\ a_2 - a_1 &= 2 \end{aligned}\right\} \text{πολ/ζουμε} \quad \text{Πιο απλή μορφή: } a_{n+2} - a_{n+1} = (n+2)!$$

Εργαζόμενοι σε αυτό τον νέο αναγωγικό τύπο καταλήγουμε ότι $11 \mid a_n$, εάν $n=4$, $n=8$ και $n \geq 10$)

12) Να αναλυθεί το γινόμενο η παράσταση $a^7 - a$. Εάν ο a είναι φυσικός αριθμός, νδο η παράσταση αυτή είναι πάντοτε διαιρετή από το 42.

ΛΥΣΗ

$$a^7 - a = a(a^6 - 1) = a(a^3-1)(a^3+1) = a(a-1)(a+1)(a^2+a+1)(a^2-a+1)$$

Για $a \in \mathbb{N}$: $a, a+1$ διαδοχικοί άρα ο ένας εξ αυτών είναι πολλ/σιο του 2. Επίσης, $a-1, a, a+1$ τρεις διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί, άρα ο ένας εξ αυτών είναι πολ/σιο του 3 και λόγω ότι $(2,3)=1$ τότε αναγκαστικά $6 \mid (a-1)(a+1)a$

Αρκεί, τώρα νδο η παράσταση διαιρείται από το 7

- Εαν $a=7k \Rightarrow 7|a$
- Εαν $a=7k+1 \Rightarrow 7|a-1$
- Εαν $a=7k-1 \Rightarrow 7|a+1$
- Εαν $a=7k+3$ ή $a=7k-2$ ο a^2-a+1 πολλ/σιο του 7
- Εαν $a=7k+2$ ή $a=7k-3$ ο a^2+a+1 πολλ/σιο του 7

Υπενθύμιση: Οι περιπτώσεις δεν είναι τυχαίες, αλλά συγκεκριμένες αφού το σύνολο $\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ είναι πλήρες σύστημα υπολοίπων του 7

Ασκήσεις σε Θεωρήματα ΦΕΡΜΑΤ-WILSON-EULER:

1) Έστω p πρώτος και μεγαλύτερος του 2
ΝΔΟ $(p-1)! \equiv (p-1) \bmod (1+2+\dots+(p-1))$

ΛΥΣΗ

$1+2+\dots+p-1 = \frac{p(p-1)}{2}$

Αρκεί νδο ισχύει ο ορισμός

Δηλ. ΘΔΟ $\frac{p(p-1)}{2} \mid [(p-1)!-(p-1)]$

Απο Θ.Wilson $(p-1)! \equiv -1 \bmod p \overset{\text{ορισμ.}}{\Rightarrow} p \mid [(p-1)!+1] \Rightarrow$

$\Rightarrow p \mid [(p-1)!+1-p] \Rightarrow p \mid [(p-1)!-(p-1)]$ (1)

Επίσης,

$(p-1)!-(p-1) = (p-1)((p-2)!-1) \Rightarrow p-1 \mid [(p-1)!-(p-1)]$ (2)

Απο (1) και (2) και λόγω ότι $(p,p-1)=1$, έχουμε:

$p\cdot(p-1) \mid [(p-1)!-(p-1)]$.

Τέλος, ο p πρώτος και περιττός $\Rightarrow \frac{p-1}{2}$ ακέραιος και έτσι, αυτό έχει ως συνέπεια ότι:

$\frac{p(p-1)}{2} \mid [(p-1)!-(p-1)]$.

2) Εαν για το φυσικό αριθμό n ισχύει ότι:
$5 \nmid n-1$, $5 \nmid n$ και $5 \nmid n+1$
νδο $5 \mid n^2+1$

ΛΥΣΗ

Εχουμε από Θ. fermat ότι:

$$n^4 \equiv 1 \bmod 5 \Rightarrow (n-1)(n+1)(n^2+1) \equiv 0 \bmod 5 \xRightarrow[n+1 \nmid 5]{n-1 \nmid 5}$$

$$\Rightarrow n^2+1 \equiv 0 \bmod 5 \Rightarrow 5 \mid n^2+1$$

(Θ. fermat: Εστω p: πρώτος και a ακέραιος με $p \nmid a$
τότε $a^{p-1} \equiv 1 \bmod p$)

3) Να υπολογιστεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 10^{6k+4}, $k \in \mathbb{N}$ με το 7

ΛΥΣΗ

$10^6 \equiv 1 \bmod 7$ ← Θ. fermat

$10^{6k} \equiv 1 \bmod 7$

Επίσης $10^4 \equiv 3^4 \equiv 9^2 \equiv 2^2 \equiv 4 \bmod 7$

Άρα, $10^{6k} \cdot 10^4 = 10^{6k+4} \equiv 4 \bmod 7$

↑ το ζητούμενο υπόλοιπο

4) ΝΔΟ ο αριθμός: $\dfrac{7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}}{10} \in \mathbb{Z}$

ΛΥΣΗ

Αρκεί το κλάσμα να μην είναι ανάγωγο

Δηλ. $10 \mid 7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}$

Το Θ. fermat μας δίνει:

$3^4 \equiv 1 \bmod 5$ (1)

Επομένως, $1968^{1968} \overset{(1)}{\equiv} 3^{1968} = (3^4)^{492} \equiv 1 \bmod 5$

Επίσης, $68^{78} \equiv 3^{78} \equiv 9 \cdot (3^4)^{19} \equiv 9 \equiv 4 \bmod 5$

οπότε $7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78} \equiv 7 - 3 \cdot 4 \equiv -5 \equiv 0 \bmod 5$

Δηλ. $5 \mid 7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}$ καθώς ο ακέραιος
$7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78} \in$ (Άρτιους) και $(2,5)=1$

Παίρνουμε ότι

$10 \mid 7 \cdot 1968^{1968} - 3 \cdot 68^{78}$

5) ΝΔΟ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, ισχύει:

$$2730 \mid n^{13}-n.$$

ΛΥΣΗ

Η πρωτογενής ανάλυση του 2730 είναι:
$2730 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
Αρκεί νδο καθένας από τους πρώτους αριθμούς
$2, 3, 5, 7, 13$ διαιρεί το $n^{13}-n$
- Αν n άρτιος τότε $n^{13}-n$ είναι άρτιος (με απόδειξη)
- Αν n περιττός τότε $n^{13}-n$ είναι άρτιος (-"- -"-)

Άρα, $\forall n \in \mathbb{Z}$ ισχύει $2 \mid n^{13}-n$
Από πόρισμα του Θ. Fermat έχουμε ότι

$n^3 \equiv n \mod 3$, $n^5 \equiv n \mod 5$, $n^7 \equiv n \mod 7$
και $n^{13} \equiv n \mod 13$

Άρα, $n^{13} \equiv n \cdot (n^3)^4 \equiv n \cdot n^4 = n^3 \cdot n^2 \equiv n^3 \equiv n \mod 3$
$n^{13} \equiv n^3 \cdot (n^5)^2 \equiv n^3 \cdot n^2 = n^5 \equiv n \mod 5$
$n^{13} = n^6 \cdot n^7 \equiv n^6 \cdot n = n^7 \equiv n \mod 7$

οπότε $3 \mid n^{13}-n$, $5 \mid n^{13}-n$, $7 \mid n^{13}-n$, $13 \mid n^{13}-n$.

6) Έστω p ένας πρώτος με $p > 5$ ΝΔΟ $p^8 \equiv 1 \mod 240$

ΛΥΣΗ

⊛ Θ. Euler $a^{\varphi(m)} \equiv 1 \mod m$, $a, m \in \mathbb{N}^*$ $(a,m)=1$

Πρωτογενής μορφή
$240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \xRightarrow{\text{Θ. fermat}} p^2 \equiv 1 \mod 3$ και $p^4 \equiv 1 \mod 5$
Ένας ακέραιος (θετικός) είναι πρώτος προς το 2^4 αν-ν
είναι περιττός $\varphi(2^4) = 2^3$ και έτσι από Θ. Euler έχουμε
$p^8 \equiv 1 \mod 16$. Συνεπώς $p^8 \equiv 1 \mod m$ όπου $m = [3, 5, 16] = 240$
άρα $p^8 \equiv 1 \mod 240$

7) ΝΔΟ $\forall n \in \mathbb{Z}$ θετικό & άρτιο ισχύει: $n^2-1 \mid 2^{n!}-1$.

ΛΥΣΗ

Θέτω $m = n+1$ και ΘΔΟ $m(m-2) \mid 2^{(m-1)!}-1$. Επειδή, $\varphi(m) \mid (m-1)!$
Έχουμε $2^{\varphi(m)}-1 \mid 2^{(m-1)!}-1$ και το Θ. Euler είναι: $m \mid 2^{\varphi(m)}-1$
Έτσι, έχουμε: $m \mid 2^{(m-1)!}-1$ όμοια $m-2 \mid 2^{(m-1)!}-1 \xRightarrow{m\ \text{περ.}} (m, m-2) = 1$